

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
Кафедра теоретической и экспериментальной физики

---

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор-директор ФТИ  
\_\_\_\_\_ В.П. Кривококов  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

**О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко**

## **ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ**

Учебно-методическое пособие по изучению моделей физических  
процессов и явлений на компьютере  
с помощью лабораторной работы № МодТ–02  
для студентов всех специальностей

Издательство  
Томского политехнического университета  
2011

УДК 53. 076

**Ревинская О.Г.**

Движение тела в вязкой среде: учебно-методическое пособие по изучению моделей физических процессов и явлений на компьютере с помощью лабораторной работы № МодТ–02 для студентов всех специальностей / О.Г. Ревинская, Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 22 с.

**УДК 53.076**

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим семинаром кафедры теоретической и экспериментальной физики ФТИ «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_\_ г.

Зав. кафедрой  
проф., доктор физ.-мат. наук

В.Ф. Пичугин

Председатель учебно-методической комиссии

А.В. Макиенко

*Рецензент*

доктор тех. наук, профессор Томского политехнического университета  
*В.А. Москалев*

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2011

© Ревинская О.Г., Кравченко Н.С., 2011

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2011

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № МодТ–02 ПО ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

## *Движение тела в вязкой среде*

**Цель работы:** изучение одномерного движения тела в вязкой среде. Определение зависимости характеристик движения (ускорения, скорости и координаты) тела от времени. Вычисление коэффициента вязкости среды.

### 1. Теоретическое содержание

#### 1.1. Вязкость (внутреннее трение)

**Идеальной жидкостью** называется жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения (физическая абстракция).

**Вязкость (внутреннее трение)** – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При движении жидкости между ее слоями возникают силы внутреннего трения, действующие таким образом, чтобы уравнять скорости всех слоев. Возникновение этих сил объясняется тем, что слои, движущиеся с разными скоростями, обмениваются молекулами. Молекулы из более быстрого слоя передают более медленному некоторое количество движения (импульса), вследствие чего последний начинает двигаться быстрее, а первый – медленнее (по закону сохранения количества движения (импульса)).

Изменение количества движения говорит о наличии сил взаимодействия, в данном случае **сил внутреннего трения**. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. И, наоборот, со стороны слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

При небольших скоростях движения жидкости сила внутреннего трения  $\vec{F}_{тр}$  тем больше, чем больше площадь соприкосновения трущихся слоев  $S$  (рис. 1), и зависит от того, насколько сильно различаются скорости этих слоев в направлении, перпендикулярном движению.

Движущуюся жидкость рассматривают как совокупность непрерывных плотно прилегающих друг к другу слоев, каждый из которых

движется с постоянной скоростью. Слои могут иметь различную толщину и скользят относительно соседних, не перемешиваясь с ними. Такое течение жидкости называется *ламинарным*. Если один слой движется со скоростью  $\vec{v}_1$ , а второй – со скоростью  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$ , расстояние между центрами слоев  $\Delta z$ . Тогда отношение  $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta z}$  характеризует изменение скорости движения жидкости в направлении перпендикулярном движению и называется *градиентом скорости* в заданном направлении. Тогда сила внутреннего трения  $\vec{F}_{mp}$ , действующая между двумя слоями, пропорциональна площади их соприкосновения и градиенту скорости

$$\vec{F}_{mp} = -\eta \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta z} S.$$

Коэффициент пропорциональности  $\eta$  зависит от природы жидкости и называется *коэффициентом внутреннего трения, коэффициентом динамической вязкости* или просто *вязкостью*.

Если один из рассматриваемых слоев жидкости не движется  $\vec{v}_1 = 0$ , то сила внутреннего трения  $\vec{F}_{mp}$  пропорциональна скорости движения другого слоя  $\vec{v}_2 \equiv \vec{v}$  ( $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}$ )

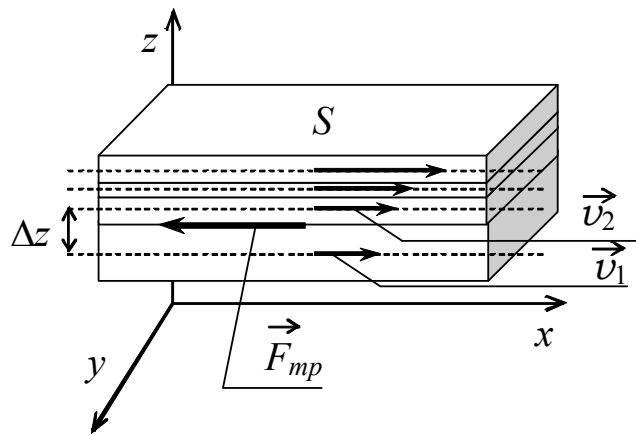


Рис. 1

$$\vec{F}_{mp} = -\eta \frac{S}{\Delta z} \vec{v}.$$

Таким образом, сила внутреннего трения пропорциональна относительной скорости  $v$  движущихся слоев, вязкости  $\eta$  жидкости и зависит от площади соприкасающихся поверхностей  $S$ .

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкостью обладают не только реальные жидкости, но и реальные газы. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен. Для жидкостей вязкость  $\eta$  с увеличением температуры уменьшается, для газов, наоборот, увеличивается. Это связано с различием в механизме внутреннего трения жидкостей и газов. Для некоторых жидкостей открыто состояние сверхтекучести, когда ее

вязкость равна нулю. Для жидкого гелия, например, состояние сверхтекучести наблюдается при 2,17 К.

## 1.2. Движение тела в вязкой среде

При движении тела в жидкости или газе на него также действует сила трения  $\vec{F}_{mp}$  со стороны внешней среды. Если жидкость (или газ) неподвижна, а скорость движения тела невелика, перемещение тела не оказывает влияния на удаленные слои жидкости. Взаимодействие происходит только со слоем, непосредственно соприкасающимся с телом. Тогда сила сопротивления  $\vec{F}_{mp}$  среды пропорциональна скорости тела  $\vec{v}$ :

$$\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}.$$

**Коэффициент сопротивления среды**  $k$ , как было показано в предыдущем параграфе, зависит от вязкости среды  $\eta$  и площади соприкасающихся поверхностей  $S$ :  $k \sim \eta S$ . Английский физик Дж. Стокс установил, что **для тел сферической формы** (радиусом  $R$ ) коэффициент сопротивления среды равен  $k = 6\pi R\eta$ . Тогда сила сопротивления среды:

$$\vec{F}_{mp} = -6\pi R\eta \cdot \vec{v}.$$

Рассмотрим **падение** без начальной скорости тела сферической формы массой  $m$  радиусом  $R$  (объем тела  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , плотность тела  $\rho_T$ ) в жидкости (или газе), имеющей плотность  $\rho_{ж}$  и вязкость  $\eta$ . На тело действуют следующие силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила Архимеда  $\vec{F}_A = -V\rho_{ж}\vec{g}$  и сила сопротивления среды  $\vec{F}_{mp} = -6\pi R\eta \cdot \vec{v}$ .

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса тела равно сумме сил, действующих на тело:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_{mp} \quad \text{или} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - V\rho_{ж}\vec{g} - 6\pi R\eta\vec{v}.$$

Движение тела является одномерным, поэтому выберем ось координат  $Ox$ , направив ее вертикально вниз (по направлению движения) и совместив начало координат с положением тела в начальный момент

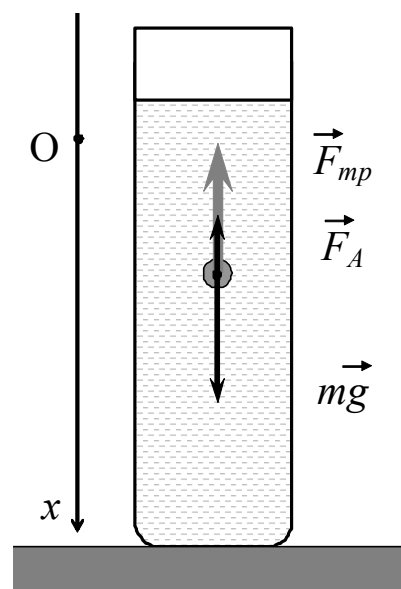


Рис. 2

времени (рис. 2). Тогда в проекции на ось OX второй закон Ньютона примет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - V\rho_{ж}g - 6\pi R\eta v.$$

Прежде чем решать полученное уравнение, приведем его к следующему виду:

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_T}\right)g - \frac{6\pi R\eta}{4/3 \pi R^3 \rho_T} v \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_T}\right)g - \frac{9\eta}{2\rho_T R^2} v.$$

Сделаем замену переменных  $u = v - \frac{2\rho_T R^2}{9\eta} \left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_T}\right)g$

и введем обозначения  $\tau = \frac{2\rho_T R^2}{9\eta}$  и  $U = \left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_T}\right)g\tau$ . Следовательно,

$$u = v - U, \quad du = dv.$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau} u \quad \text{или} \quad \frac{du}{u} = -\frac{1}{\tau} dt.$$

Проинтегрировав, получим  $\ln \frac{u}{u(0)} = -\frac{t}{\tau}$  или  $u = u(0)e^{-t/\tau}$ .

Учитывая, что  $u(0) = v(0) - U$ , зависимость скорости от времени примет вид:

$$v - U = (v(0) - U)e^{-t/\tau}.$$

Тело начинает движение без начальной скорости  $v(0) = 0$ , поэтому

$$v(t) = U(1 - e^{-t/\tau}).$$

Проинтегрировав полученное выражение по времени и приняв во внимание, что в начальный момент времени тело находилось в начале координат ( $x(0) = 0$ ), получим зависимость координаты тела от времени

$$x(t) = Ut - U\tau(1 - e^{-t/\tau}).$$

В результате получили зависимости координаты  $x = x(t)$  и скорости  $v = v(t)$  от времени

$$x(t) = Ut - U\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{и} \quad v(t) = U(1 - e^{-t/\tau}),$$

где  $\tau = \frac{2\rho_T R^2}{9\eta}$  и  $U = g_{ж}\tau$ ,  $g_{ж} = \left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_T}\right)g$ .

Продифференцировав зависимость скорости  $v = v(t)$  от времени, получим зависимость ускорения  $a = a(t)$  от времени

$$a(t) = \frac{U}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Из выражения для ускорения видно, что  $\tau$  – время, за которое ускорение тела уменьшается в  $e$  раз:  $\frac{a(t)}{a(t+\tau)} = \frac{e^{-t/\tau}}{e^{-(t+\tau)/\tau}} = e$ . Время  $\tau$  называется **периодом установления**.

Если время наблюдения  $t \gg \tau$  много больше периода установления  $\tau$ , то экспонента в выражении для скорости стремится к нулю, а скорость тела стремится к  $U$ :  $v(t) \rightarrow U$ .  $U$  – предельная (максимальная) скорость, с которой может двигаться тело в данной среде, называется **скоростью установившегося движения**.

Таким образом, если период установления мал, спустя какое-то время тело в вязкой среде начнет двигаться с постоянной скоростью, то есть **равномерно**.

## 2. Рабочие формулы

Период установления  $\tau$  обратно пропорционален вязкости среды  $\eta$ :  $\tau = \frac{2\rho_T R^2}{9\eta}$ . Зная период установления для данного движения, а также

плотность  $\rho_T$  и радиус  $R$  тела, можно определить вязкость среды:  $\eta = \frac{2\rho_T R^2}{9\tau}$ .

В предыдущем параграфе было показано, что при определенных условиях падающее в вязкой среде тело может начать двигаться равномерно. Однако в задачах, где сопротивлением окружающей среды можно пренебречь, движение свободно падающего тела является равноускоренным. То есть характер движения тела зависит от вязкости среды. Рассмотрим, при каких условиях будут наблюдаться перечисленные виды движения, и какие еще виды движения возможны.

Для этого экспоненту в полученном в предыдущем параграфе уравнении движения  $x(t) = Ut - U\tau(1 - e^{-t/\tau})$  разложим в ряд

$$x(t) = Ut - U\tau \left( 1 - \left( 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2!\tau^2} - \frac{t^3}{3!\tau^3} + \dots \right) \right).$$

## 2.1. Равноускоренное движение

Если период установления много больше времени эксперимента  $\tau \gg t$ , отношение  $t/\tau$  мало ( $t/\tau \ll 1$ ), достаточно ограничиться в разложении экспоненты тремя первыми членами

$$x(t) \approx Ut - U\tau \left( 1 - 1 + \frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} \right).$$

Подставив  $U = g_{\text{ж}}\tau$  и приведя подобные, получим

$$x(t) \approx Ut - U\tau \left( \frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} \right) = \frac{Ut^2}{2\tau} = \frac{g_{\text{ж}}t^2}{2} \Rightarrow x(t) \approx \frac{g_{\text{ж}}t^2}{2}.$$

Тогда ускорение тела:  $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \approx g_{\text{ж}}$ .

Тело движется равноускоренно. Такое движение наблюдается, если период установления много больше времени эксперимента  $\tau \gg t$ .

Из связи периода установления с вязкостью и массой

$$\tau = \frac{2\rho_T R^2}{9\eta} = \frac{1}{3 \cdot (6\pi^2)^{1/3}} \rho_T^{1/3} \frac{m^{2/3}}{\eta}.$$

следует, что такое движение может быть реализовано либо в среде с малой вязкостью ( $\eta \rightarrow 0$ ), либо для тел большой массы. Тогда говорят, что сопротивлением среды можно пренебречь.

Если  $\rho_{\text{ж}} \ll \rho_T$ , то тело движется с ускорением близким к ускорению свободного падения  $g_{\text{ж}} \rightarrow g$  (сила Архимеда пренебрежимо мала).

## 2.2. Ускоренное движение

Если период установления больше времени эксперимента  $\tau > t$ , отношение  $t/\tau$  мало, но  $t/\tau < 1$ , не достаточно взять в разложении экспоненты три члена

$$x(t) = Ut - U\tau \left( 1 - 1 + \frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} + \frac{t^3}{3!\tau^3} - \frac{t^4}{4!\tau^4} + \dots \right).$$

Подставив  $U = g_{\text{ж}}\tau$  и приведя подобные, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= Ut - U\tau \left( \frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{2\tau^2} + \frac{t^3}{3!\tau^3} - \frac{t^4}{4!\tau^4} + \dots \right) = \frac{Ut^2}{2\tau} - \frac{Ut^3}{3!\tau^2} + \frac{Ut^4}{4!\tau^3} - \dots = \\ &= \frac{g_{\text{ж}}t^2}{2} - \frac{g_{\text{ж}}t^3}{3!\tau} + \frac{g_{\text{ж}}t^4}{4!\tau^2} - \dots \Rightarrow x(t) = g_{\text{ж}} \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!\tau} + \frac{t^4}{4!\tau^2} - \dots \right). \end{aligned}$$



Тогда ускорение тела: 
$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = g_{\text{ж}} \left( 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} \dots \right).$$

Тело движется ускоренно. Ускорение тела зависит от времени. Так как период установления, хотя и не очень велик, но больше времени эксперимента  $\tau > t$ , ускорение тела постепенно уменьшается. Быстрота уменьшения ускорения зависит от отношения  $t/\tau$ . Из связи периода установления с вязкостью и массой следует, что такое движение может быть реализовано либо в среде со средней вязкостью, либо для тел средней массы. В этом случае сопротивлением среды пренебречь нельзя.

### 2.3. Равномерное движение

Если период установления много меньше времени эксперимента  $\tau \ll t$ , в разложении в ряд экспоненты невозможно отбросить какие-либо члены (так как  $t/\tau$  не является малой величиной:  $t/\tau > 1$ ). Наоборот, при  $\tau \ll t$ , экспонента  $e^{-t/\tau}$  становится пренебрежимо мала по сравнению с единицей:

$$x(t) = Ut - U\tau(1 - e^{-t/\tau}) \approx Ut - U\tau.$$

Тогда скорость тела  $v(t) = \frac{dx}{dt} \approx U$ , а ускорение:  $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \approx 0$ .

Полученное уравнение описывает движение тела с постоянной скоростью  $U$ . Такое движение будет наблюдаться только спустя некоторое время, порядка  $5-10\tau$ , когда скорость тела достигнет  $U$  (говорят, что движение «установилось»). Такое движение может быть реализовано либо в среде с большой вязкостью, либо для тел малой массы. Сопротивление среды позволяет компенсировать действие силы тяжести.

### 3. Модель экспериментальной установки

В данной работе с помощью средств компьютерной графики моделируется процесс свободного падения тела выбранной массы в вязкой среде (жидкости или газе), которой наполнен сосуд. Высота сосуда 400 см. В сосуде на одинаковом расстоянии друг от друга расположены датчики. Для определения времени прохождения телом датчиков используется секундомер, способный измерять время с точностью до 0,1 миллисекунды. Расстояние между датчиками можно изменять в диапазоне от 30 до 40 см. При заданных условиях погрешность определения коэффициента вязкости тяжелых жидкостей не превышает 0,7%. Для легких жидкостей и газов погрешность определения вязкости зави-

сит от точности представления (разложения в ряд) закона движения. Если аналитическое представление закона движения выбрано правильно, погрешность определения коэффициента вязкости легких жидкостей и газов также не превышает 1–2%.

Работа выполняется на IBM-совместимом персональном компьютере в виде самостоятельного Windows-приложения. Для удобства выполнения работы в программе предусмотрены три раздела: краткое описание работы; порядок выполнения работы и эксперимент. Переключение между разделами осуществляется с помощью кнопок «Ход работы» и «Эксперимент». Нажатие этих кнопок в зависимости от контекста работы программы приводит либо к вызову соответствующих разделов, либо к возвращению в раздел описания.

Раздел программы «Эксперимент» содержит три переключателя для выбора типа среды, с каждым из которых связан раскрывающийся список для выбора среды, ползунки для выбора массы тела и расстояния между датчиками, а также вспомогательные кнопки, позволяющие управлять экспериментом.

#### Варианты выполнения работы

		Газы					
		Неон 50°C	Воздух 21,6°C	Воздух 16°C	Воздух 0°C	Азот 0°C	Хлор 20°C
Тяжелые жидкости	Масло касторовое 10°C	1	12	21	28	33	36
	Глицерин 20°C	7	2	13	22	29	34
	Масло касторовое 18°C	17	8	3	14	23	30
	Масло касторовое 20°C	25	18	9	4	15	24
	Глицерин 30°C	31	26	19	10	5	16
	Масло касторовое 30°C	35	32	27	20	11	6
		Вода 20°C	Анилин 50°C	Вода 50°C	Спирт этило- вый 30°C	Скипи- дар 20°C	Бензол 10°C
Легкие жидкости							

## 4. Порядок выполнения работы

### 4.1. Краткое описание хода работы

#### ЭТАП 1. Изучение равномерного движения.

1. Выберите тяжелую жидкость (по указанию преподавателя).
2. Установите минимально возможное значение массы тела.
3. Задайте расстояние между датчиками в сосуде.
4. Измерьте время прохождения телом всех датчиков.
5. Повторите опыт для пяти значений массы тела.
6. Постройте графики зависимости координаты тела от времени.
7. Рассчитайте среднюю скорость тела на каждом отрезке пути.
8. По методу наименьших квадратов вычислите коэффициенты аналитической зависимости координаты тела от времени.
9. Вычислите период установления, скорость установившегося движения и коэффициент вязкости жидкости.
10. Вычислите теоретические значения периода установления, скорости установившегося движения и относительную погрешность коэффициента вязкости.
11. Запишите аналитические зависимости координаты, скорости и ускорения тела от времени.
12. Сделайте выводы.

#### ЭТАП 2. Изучение равноускоренного движения.

13. Выберите газ (по указанию преподавателя).
14. Установите минимально возможное значение массы тела.
15. Измерьте время прохождения телом всех датчиков.
16. Повторите опыт для пяти значений массы тела.
17. Постройте графики зависимости координаты тела от времени.
18. Рассчитайте среднюю скорость тела на каждом отрезке пути.
19. Рассчитайте разницу между координатами тела, движущегося равноускоренно, и полученными в эксперименте.
20. По методу наименьших квадратов вычислите коэффициенты аналитической зависимости координаты тела от времени.
21. Вычислите период установления и коэффициент вязкости газа.
22. Вычислите теоретические значения периода установления и относительную погрешность коэффициента вязкости.
23. Запишите аналитические зависимости координаты, скорости и ускорения тела от времени.
24. Сделайте выводы.

### ЭТАП 3. Изучение ускоренного движения.

25. Выберите легкую жидкость (по указанию преподавателя).
26. Установите минимально возможное значение массы тела.
27. Измерьте время прохождения телом всех датчиков.
28. Повторите опыт для пяти значений массы тела.
29. Постройте графики зависимости координаты тела от времени.
30. Рассчитайте среднюю скорость тела на каждом отрезке пути.
31. Рассчитайте разницу между координатами тела, движущегося равноускоренно, и полученными в эксперименте.
32. По методу наименьших квадратов вычислите коэффициенты аналитической зависимости координаты тела от времени.
33. Вычислите период установления и коэффициент вязкости жидкости.
34. Вычислите теоретические значения периода установления и относительную погрешность коэффициента вязкости.
35. Запишите аналитические зависимости координаты, скорости и ускорения тела от времени.
36. Сделайте выводы.

## 4.2. Подробное описание хода работы

При выполнении работы рекомендуется следующая последовательность действий:

### ЭТАП 1. Изучение равномерного движения.

При достаточно большом коэффициенте вязкости спустя какое-то время движение тела становится равномерным. Время, спустя которое можно считать, что движение стало равномерным, зависит от формы и массы тела. В данной работе используются только тела сферической формы. Необходимо исследовать, справедливо ли данное утверждение, если среда, в которой движется тело, является тяжелой жидкостью, и как характеристики движения зависят от массы тела.

1. В работе имеются три переключателя среды: тяжелые жидкости, легкие жидкости, газы, с каждым из них связан раскрывающийся список. Установите переключатель «Среда» в положение «Тяжелые жидкости». С помощью раскрывающегося списка «Тяжелые жидкости» выберите одну из жидкостей: масло касторовое 10°C, глицерин 20°C, масло касторовое 18°C, масло касторовое 20°C, глицерин 30°C, масло касторовое 30°C, в которой будет выполняться эксперимент (по указанию преподавателя). Плотность и вязкость, необходимые для расчета теоретических значений, автоматически указываются под списком при выборе жидкости.

2. Ползунок «Масса тела» позволяет изменять массу тела, с которым выполняется эксперимент, в пределах от 40 до 800 г. С помощью ползунка «Масса тела» установите минимально возможное значение массы (**40 г**). На панели инструментов «Тело» возле ползунка «Масса тела» также указываются значения радиуса тела и плотности материала тела, необходимые для выполнения расчетов.

3. На панели секундомера расположен ползунок **«Расстояние между датчиками»**, который позволяет изменять расстояние между датчиками в пределах от 30 до 40 см. С помощью этого ползунка выберите любое (по своему желанию) расстояние между датчиками. Выбранное расстояние между датчиками указывается над ползунком **«Расстояние между датчиками»**. В соответствии с выбранным расстоянием по всей длине сосуда на одинаковом расстоянии друг от друга располагаются датчики.

**Рекомендации:** в дальнейшем скорость тела приближенно оценивается как отношение  $\Delta x/\Delta t$  расстояния между датчиками  $\Delta x$  и интервала времени  $\Delta t$ , за которое тело прошло это расстояние. Такой метод оценки скорости дает достаточно точные результаты только на малых отрезках пути  $\Delta x$ . Поэтому для повышения точности эксперимента выберите минимально возможное значение расстояние между датчиками. Не меняйте расстояние между датчиками в течение всей работы (это позволит сократить количество расчетов).

4. Нажмите кнопку **«Начать эксперимент»** на панели секундомера. Тело начнет двигаться, и одновременно включится секундомер. Когда тело пересекает линию, на которой расположен датчик, секундомер фиксирует значение времени в окне **«Время прохождения датчиков»**. Когда тело достигнет дна сосуда – эксперимент закончится, секундомер автоматически остановится. При необходимости в процессе выполнения эксперимента его можно прервать с помощью кнопки **«Остановить эксперимент»**.

ЗАПИШИТЕ ВРЕМЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ТЕЛОМ ВСЕХ ДАТЧИКОВ В ТАБЛИЦУ 1.

5. Не изменяя расстояния между датчиками, с помощью ползунка **«Масса тела»** установите новое значение массы тела. Рекомендуется выполнить опыты для следующих значений массы тела: **40, 100, 200, 400, 800 г**.

6. Зная расстояние между датчиками  $\Delta x$ , вычислите координаты  $x$  тела, соответствующие полученным в эксперименте значениям времени,

$$x_k = 0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, 4\Delta x, \dots$$

На одном графике изобразите зависимости координат тела от времени для всех пяти значений массы, использованных в эксперименте.

7. Рассчитайте среднюю скорость тела на каждом отрезке пути.

На каждом отрезке пути между двумя соседними датчиками тело проходит расстояние  $\Delta x$  за время  $\Delta t$ . Тогда средняя скорость  $v$  тела на данном отрезке пути можно определить как  $v = \Delta x/\Delta t$ . Например, между  $k$ -м и  $(k + 1)$ -м датчиком средняя скорость равна  $v_{k+1} = \Delta x/\Delta t_{k+1} = \Delta x/(t_{k+1} - t_k)$  ( $t_k$  – время прохождения телом  $k$ -го датчика,  $t_{k+1}$  – время прохождения  $(k + 1)$ -го датчика).

Для каждого эксперимента (каждого значения массы тела) определите, с какого момента времени скорость тела перестает меняться ( $v = \text{const}$ ), то есть движение становится равномерным (установившимся).

8. Для определения параметров движения полученные экспериментально результаты необходимо математически обработать и установить вид аналитической зависимости. Аналитическая зависимость координаты тела от времени при равномерном движении имеет вид:  $x = x_0 + Ut$ . Чтобы рассчитать значения коэффициентов  $x_0$  и  $U$  аналитической зависимости, в соответствии с методом наименьших квадратов необходимо вычислить следующие величины:

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k, \quad S_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k^2, \quad Y_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad Y_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k t_k.$$

( $S_1, S_2, Y_1, Y_2$  рассчитываются ТОЛЬКО по экспериментальным данным, для которых движение является установившимся  $v = \text{const}$ )

Тогда коэффициенты  $x_0$  и  $U$  рассчитываются следующим образом:

$$U = \frac{Y_1 S_1 - Y_2}{S_1^2 - S_2}, \quad x_0 = Y_1 - U S_1.$$

Выполните эти расчеты для каждого эксперимента (для разных масс тела).

**Рекомендации.** Для повышения эффективности расчетов можно использовать электронные таблицы (например, MS Excel).

9. Сравнивая полученную аналитическую зависимость  $x = x_0 + Ut$  с уравнением установившегося движения  $x = Ut - U\tau$ , получим, что  $U$  – скорость установившегося движения, а период установления  $\tau$  равен:  $\tau = -\frac{x_0}{U}$ . Рассчитайте период установления для каждого эксперимента.

Зная период установления  $\tau$ , а также радиус  $R$  и плотность тела  $\rho_T$ , определите коэффициент вязкости жидкости  $\eta_{\text{э}}$  (экспериментальное значение):  $\eta_{\text{э}} = \frac{2}{9} \frac{\rho_T R^2}{\tau}$ .

Выполните эти расчеты для каждого эксперимента (для разных масс тела).

10. Для вычисления теоретических значений периода установления  $\tau_T$  и скорости  $U_T$  установившегося движения используйте теоретическое значение вязкости  $\eta_T$ , которое указывается на панели инструментов «Среда» при выборе жидкости (см. пункт 1):

$$\tau_T = \frac{2}{9} \frac{\rho_T R^2}{\eta_T}, \quad U_T = \left(1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_T}\right) g \tau_T.$$

Относительную погрешность коэффициента вязкости можно вычислить следующим образом:

$$\delta = \frac{|\eta_{\text{э}} - \eta_T|}{\eta_T} \cdot 100\%.$$

11. Для каждого эксперимента (для разных масс тела) запишите аналитическую зависимость координаты тела от времени  $x = x_0 + Ut$  в виде  $x = *,*** + *,*** \cdot t$ , где вместо коэффициентов  $x_0$  и  $U$  подставлены числовые значения.

Аналитическая зависимость скорости от времени получается путем однократного дифференцирования аналитической зависимости координаты от времени  $v = \frac{dx}{dt}$  с подставленными числовыми значениями.

Аналитическая зависимость ускорения от времени получается путем однократного дифференцирования аналитической зависимости скорости от времени  $a = \frac{dv}{dt}$ .

Выполните дифференцирование и запишите полученные аналитические зависимости через числовые значения в виде:

$$x = *,*** + *,*** \cdot t; \quad v = *,***; \quad a = \dots$$

12. Сделайте выводы:

Во всех ли опытах движение тела можно считать равномерным?

С каким ускорением движется тело при установившемся движении?

Как период установления зависит от массы тела?

Через сколько (примерно) периодов установления  $\tau$  скорость тела перестает меняться?

Как зависит относительная погрешность определения коэффициента вязкости от отношения периода установления  $\tau$  к длительности эксперимента?

Как характеристики движения зависят от массы тела?

## ЭТАП 2. Изучение равноускоренного движения.

При малом коэффициенте вязкости движение тела является равноускоренным. Тогда характеристики движения не зависят (или слабо зависят) от массы тела. Необходимо исследовать, справедливо ли данное утверждение, если среда, в которой движется тело, является газом, и зависят ли характеристики движения от массы тела.

13. В работе имеются три переключателя среды: тяжелые жидкости, легкие жидкости, газы, с каждым из них связан раскрывающийся список. Установите переключатель «Среда» в положение «Газы». С помощью раскрывающегося списка «Газы» выберите один из газов: неон 50°C, воздух 21,6°C, воздух 16°C, воздух 0°C, азот 0°C, хлор 20°C, в котором будет выполняться эксперимент (по указанию преподавателя). Плотность и вязкость, необходимые для расчета теоретических значений, автоматически указываются под списком при выборе газа.

14. В экспериментах с газами ползунок «Масса тела» позволяет изменять массу тела, с которым выполняется эксперимент, в пределах от 0,02 до 0,4 г. С помощью ползунка «Масса тела» установите минимально возможное значение массы (0,02 г). На панели инструментов «Тело» возле ползунка «Масса тела» также указываются значения радиуса тела и плотности материала тела, необходимые для выполнения расчетов.

15. Не изменяя расстояния между датчиками, выполните эксперимент как описано в пункте 4.

ЗАПИШИТЕ ВРЕМЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ТЕЛОМ ВСЕХ ДАТЧИКОВ В ТАБЛИЦУ 2.

16. Не изменяя расстояния между датчиками, с помощью ползунка «Масса тела» установите новое значение массы тела. Рекомендуется выполнить опыты для следующих значений массы тела: 0,02, 0,2, 0,3, 0,35, 0,4 г.

17. Постройте графики зависимости координаты тела от времени как описано в пункте 6.

18. Рассчитайте среднюю скорость тела на каждом отрезке пути (как в пункте 7). Для каждого эксперимента (массы тела) определите, существует ли отрезок времени, в течение которого скорость тела можно считать постоянной ( $v = \text{const}$ ).

19. Для каждого значения времени  $t_k$  прохождения телом датчика, вычислите разницу  $\Delta_k$  между координатой  $x_k$  тела в эксперименте и координатой тела, движущегося равноускоренно:

$$\Delta_k = x_k - g_{ж} \frac{t_k^2}{2} \quad (\text{где } g_{ж} = \left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_T}\right)g - \text{ускорение свободного падения в}$$

жидкости;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ).

Для каждого эксперимента определите, в течение какого отрезка времени движение тела является равноускоренным ( $\Delta_k = 0$  с точностью до третьего знака после запятой).

Если отрезок времени, в течение которого движение тела отличалось от равноускоренного ( $\Delta_k \neq 0$ ), много меньше длительности эксперимента, движение тела можно считать равноускоренным. Определите для каждого эксперимента, является ли движение равноускоренным.

20. Для определения параметров движения полученные экспериментально результаты необходимо математически обработать и установить вид аналитической зависимости.

Равноускоренное движение описывается уравнением  $x = g_{ж} \frac{t^2}{2}$ . Если

движение тела немного отличается от равноускоренного, в аналитической зависимости координаты тела от времени кроме члена, пропорционального квадрату времени,

появится член, пропорциональный кубу времени:  $x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha \frac{t^3}{3!}$  (осталь-

ными членами можно пренебречь). С помощью математических методов обработки

данных вычислим значение коэффициента  $\alpha$ . Если  $\alpha$  стремится к нулю, то движение является равноускоренным. Чтобы рассчитать значение коэффициента  $\alpha$  аналитической зависимости, в соответствии с методом наименьших квадратов необходимо

вычислить следующие величины:

$$S = \frac{1}{(3!)^2 n} \sum_{k=1}^n t_k^6, \quad Y = \frac{1}{3!n} \sum_{k=1}^n \Delta_k t_k^3.$$

( $S$  и  $Y$  рассчитываются по всем экспериментальным данным, независимо от значений  $\Delta_k$  и  $u_k$ ).

Тогда коэффициент  $\alpha$  рассчитывается следующим образом:  $\alpha = \frac{Y}{S}$ .

Выполните эти расчеты для каждого эксперимента (для разных масс тела).

**Рекомендации.** Для повышения эффективности расчетов можно использовать электронные таблицы (например, MS Excel).

21. Сравнивая полученную аналитическую зависимость  $x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha \frac{t^3}{3!}$  с

разложением уравнения движения в ряд  $x \approx g_{ж} \frac{t^2}{2} - \frac{g_{ж}}{\tau} \frac{t^3}{3!}$ , получим, что период

установления  $\tau$  равен:  $\tau = -\frac{g_{ж}}{\alpha}$ . Рассчитайте период установления для каждого эксперимента.

Зная период установления  $\tau$ , а также радиус  $R$  и плотность тела  $\rho_T$ , определите коэффициент вязкости газа  $\eta_{э}$  (экспериментальное значение):  $\eta_{э} = \frac{2}{9} \frac{\rho_T R^2}{\tau}$ .



Предварительно проанализируйте соотношение числовых значений  $\alpha$  и  $g_{ж}$ . Если  $\alpha \ll g_{ж}$  (период установления  $\tau \rightarrow \infty$ ), движение является равноускоренным и не зависит от вязкости газа и массы тела (говорят, что сопротивлением среды можно пренебречь). Следовательно, период установления и вязкость среды определить **невозможно**. Рассчитывайте экспериментальные значения вязкости газа только для тех случаев, когда сопротивлением среды пренебречь нельзя.

22. Для экспериментов, в которых сопротивлением среды пренебречь нельзя, вычислите теоретические значения периода установления и относительную погрешность коэффициента вязкости как в пункте 10.

23. Для каждого эксперимента (для разных масс тела) запишите аналитическую зависимость координаты тела от времени  $x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha \frac{t^3}{3!}$  в виде  $x = *, ***, \frac{t^2}{2} + *, ***, \frac{t^3}{3!}$ , где вместо коэффициентов  $g_{ж}$  и  $\alpha$  подставлены числовые значения.

Выполните дифференцирование (см. пункт 11) и запишите аналитические зависимости скорости и ускорения тела через числовые значения в виде:

$$x = *, ***, \frac{t^2}{2} + *, ***, \frac{t^3}{3!}; \quad v = *, ***, t + *, ***, \frac{t^2}{2}; \quad a = *, ***, + *, ***, t$$

24. Сделайте выводы:

Во всех ли опытах движение тела можно считать равноускоренным?

В течение какой части времени в каждом эксперименте движение можно считать равноускоренным? На основании каких экспериментальных данных можно сделать такой вывод?

При каких значениях массы в выбранном газе движение тела можно считать равноускоренным?

В каком отношении (примерно) находятся теоретическое значение периода установления  $\tau$  и длительность эксперимента при равноускоренном и неравноускоренном движении?

Как характеристики движения зависят от массы тела?

### ЭТАП 3. Изучение ускоренного движения.

При среднем коэффициенте вязкости движение тела является ускоренным, причем ускорение тела зависит от времени. Характеристики движения зависят от массы тела. Необходимо исследовать, справедливо ли данное утверждение, если среда, в которой движется тело, является легкой жидкостью, и как характеристики движения зависят от массы тела.

25. В работе имеются три переключателя среды: тяжелые жидкости, легкие жидкости, газы, с каждым из которых связан раскрывающийся список. Установите переключатель «Среда» в положение «Легкие жидкости». С помощью раскрывающегося списка «Легкие жидкости» выберите одну из жидкостей: анилин 50°C, скипидар 20°C, вода 20°C, спирт этиловый 30°C, бензол 10°C, вода 50°C, в которой будет выполняться эксперимент (по указанию преподавателя). Плотность и вязкость, необходимые для расчета теоретических значений, автоматически указываются под списком при выборе газа.

26. В экспериментах с легкими ползунком «**Масса тела**» позволяет изменять массу тела, с которым выполняется эксперимент, в пределах от 0,05 до 1 г. С помощью ползунка «**Масса тела**» установите минимально возможное значение массы (**0,05 г**). На панели инструментов «**Тело**» возле ползунка «Масса тела» также указываются значения радиуса тела и плотности материала тела, необходимые для выполнения расчетов.

27. Не изменяя расстояния между датчиками, выполните эксперимент как описано в пункте 4.

**ЗАПИШИТЕ ВРЕМЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ТЕЛОМ ВСЕХ ДАТЧИКОВ В ТАБЛИЦУ 3.**

28. Не изменяя расстояния между датчиками, с помощью ползунка «**Масса тела**» установите новое значение массы тела. Рекомендуется выполнить опыты для следующих значений массы тела: **0,05, 0,35, 0,5, 0,65, 1,0 г**.

29. Постройте графики зависимости координаты тела от времени как описано в пункте 6.

30. Рассчитайте среднюю скорость тела на каждом отрезке пути и проанализируйте характер движения как в пункте 18.

31. Рассчитайте разницу между координатами тела, полученными в эксперименте, и координатами тела, движущегося равноускоренно (как в пункте 19). Проанализируйте полученные результаты.

32. Для определения параметров движения полученные экспериментально результаты необходимо математически обработать и установить вид аналитической зависимости. Если движение тела значительно отличается от равноускоренного, аналитическая зависимость координаты тела от времени будет содержать как минимум три члена:  $x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha_1 \frac{t^3}{3!} + \alpha_2 \frac{t^4}{4!}$ . С помощью математических методов обработки данных рассчитаем значения коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Для этого в соответствии с методом наименьших квадратов необходимо вычислить следующие величины:

$$S_1 = \frac{1}{(3!)^2 n} \sum_{k=1}^n t_k^6, \quad S_2 = \frac{1}{12^2 n} \sum_{k=1}^n t_k^7, \quad S_3 = \frac{1}{(4!)^2 n} \sum_{k=1}^n t_k^8,$$

$$Y_1 = \frac{1}{3! n} \sum_{k=1}^n \Delta_k t_k^3, \quad Y_2 = \frac{1}{4! n} \sum_{k=1}^n \Delta_k t_k^4.$$

( $S_1, S_2, S_3, Y_1$  и  $Y_2$  рассчитываются по всем экспериментальным данным, независимо от значений  $\Delta_k$  и  $u_k$ ).

Тогда коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  рассчитываются следующим образом:

$$\alpha_2 = \frac{Y_1 S_2 - Y_2 S_1}{S_2^2 - S_3 S_1}, \quad \alpha_1 = \frac{Y_1}{S_1} - \alpha_2 \frac{S_2}{S_1}.$$

Выполните эти расчеты для каждого эксперимента (для разных масс тела).

**Рекомендации.** Для повышения эффективности расчетов можно использовать электронные таблицы (например, MS Excel).

33. Сравнивая полученную аналитическую зависимость

$$x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha_1 \frac{t^3}{3!} + \alpha_2 \frac{t^4}{4!}$$

с разложением уравнения движения в ряд 
$$x \approx g_{ж} \frac{t^2}{2} - \frac{g_{ж}}{\tau} \frac{t^3}{3!} + \frac{g_{ж}}{\tau^2} \frac{t^4}{4!},$$

получим, что период установления  $\tau$  равен:  $\tau = -\frac{g_{ж}}{\alpha_1}$  или  $\tau = \sqrt{\frac{g_{ж}}{\alpha_2}}$ . Рассчитайте

период установления для каждого эксперимента по обеим формулам.

Зная период установления  $\tau$ , а также радиус  $R$  и плотность тела  $\rho_T$ , определите коэффициент вязкости жидкости  $\eta_{\text{э}}$  (экспериментальное значение):  $\eta_{\text{э}} = \frac{2}{9} \frac{\rho_T R^2}{\tau}$ .

Предварительно проанализируйте полученные значения периода установления  $\tau$ . Если период установления  $\tau$ , полученный из коэффициента  $\alpha_1$ , равен периоду установления, полученному из коэффициента  $\alpha_2$ , можно считать, что в разложении координаты в ряд выбрано достаточное количество членов. Если значения получаются сильно отличающиеся друг от друга, данное приближение нельзя считать удовлетворительным и оба значения  $\tau$  НЕЛЬЗЯ использовать для определения коэффициента вязкости.

Рассчитывайте экспериментальное значение вязкости только для тех случаев, когда значения  $\tau$ , полученные из коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , отличаются незначительно.

34. Для экспериментов, в которых можно считать, что разложения уравнения движения в ряд до четвертой степени по времени достаточно для описания движения тела, вычислите теоретические значения периода установления и относительную погрешность коэффициента вязкости как в пункте 10.

35. Для каждого эксперимента (для разных масс тела) запишите аналитическую зависимость координаты тела от времени  $x = g_{ж} \frac{t^2}{2} + \alpha_1 \frac{t^3}{3!} + \alpha_2 \frac{t^4}{4!}$  в виде

$x = *, ***, \frac{t^2}{2} + *, ***, \frac{t^3}{3!} + *, ***, \frac{t^4}{4!}$ , где вместо коэффициентов  $g_{ж}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  подставлены числовые значения.

Выполните дифференцирование (см. пункт 11) и запишите аналитические зависимости скорости и ускорения тела через числовые значения в виде:

$$x = *, ***, \frac{t^2}{2} + *, ***, \frac{t^3}{3!} + *, ***, \frac{t^4}{4!}; \quad v = *, ***, t + *, ***, \frac{t^2}{2} + *, ***, \frac{t^3}{3!};$$

$$a = *, ***, + *, ***, t + *, ***, \frac{t^2}{2}$$

36. Сделайте выводы:

Можно ли в каких либо из проведенных опытов считать, что ускорение линейно зависит от времени?

Как сильно отличаются полученные данные от равномерного и равноускоренного движений?

При каких значениях массы в выбранной жидкости ускорение тела можно считать линейно зависящим от скорости?

В каком отношении (примерно) находятся теоретическое значение периода установления  $\tau$  и длительность эксперимента при движении, для которого ускорение тела линейно зависит от времени?

Как характеристики движения зависят от массы тела?

**Таблица 1**

		Масса тела $m$ , г		Радиус тела $R$ , см	
$k$	Координата тела $x_k$ , м	Время $t_k$ , с	Скорость $v_k$ , м/с	$x_k \cdot t_k$ , м·с	$t_k^2$ , с <sup>2</sup>
1	0	0	–	0	0
2					
...					
$n$					
		$Y_1$	$S_1$	$Y_2$	$S_2$

**Таблица 2**

		Масса тела $m$ , г		Радиус тела $R$ , см		
$k$	Координата тела $x_k$ , м	Время $t_k$ , с	Скорость $v_k$ , м/с	Отличие от равноуско- ренного движения $\Delta_k$ , м	$\Delta_k \cdot t_k^3$ , м·с <sup>3</sup>	$t_k^6$ , с <sup>6</sup>
1	0	0	–	0	0	0
2						
...						
$n$						
					$Y$	$S$

**Таблица 3**

		Масса тела $m$ , г			Радиус тела $R$ , см				
$k$	Коорди- ната тела $x_k$ , м	Время $t_k$ , с	Скорость $v_k$ , м/с	Отличие от равно- ускорен- ного движе- ния $\Delta_k$ , м	$\Delta_k \cdot t_k^3$ , м·с <sup>3</sup>	$\Delta_k \cdot t_k^4$ , м·с <sup>4</sup>	$t_k^6$ , с <sup>6</sup>	$t_k^7$ , с <sup>7</sup>	$t_k^8$ , с <sup>8</sup>
1	0	0	–	0	0	0	0	0	0
2									
...									
$n$									
					$Y_1$	$Y_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$

## 5. Контрольные вопросы

1. Какое свойство жидкости (газа) называют вязкостью?
2. Какое течение жидкости (газа) называют ламинарным?
3. Как связана сила сопротивления среды со скоростью течения жидкости (газа)?
4. Какие силы действуют на тело, свободно падающее в вязкой среде (жидкости или газа)? Запишите второй закон Ньютона для этого тела.
5. Запишите зависимость координаты и скорости тела, свободно падающего в вязкой среде.
6. Что такое период установления и скорость установившегося движения?
7. При каких условиях можно считать, что свободно падающее в вязкой среде тело движется с постоянным ускорением?
8. При каких условиях можно считать, что свободно падающее в вязкой среде тело движется с переменным ускорением?
9. При каких условиях можно считать, что свободно падающее в вязкой среде тело движется без ускорения?
10. Опишите порядок выполнения работы.

Учебное издание

РЕВИНСКАЯ Ольга Геннадьевна  
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна

## **ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ**

Учебно-методическое пособие по изучению моделей  
физических процессов и явлений на компьютере  
с помощью лабораторной работы № МодТ–02  
для студентов всех специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством  
предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати \_\_\_\_\_.2011. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».  
Печать RISO. Усл.печ.л. 1,86. Уч.-изд.л. 1,68.  
Заказ \_\_\_\_\_ . Тираж 50 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.  
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru